数理解析研究所講究録
270巻 1976年 60-73

多オートマトン系におけるdefinitenessの問題

京大 理学部　西尾 英之助

§0 はじめに

多オートマトン(polyautomaton)は，同一の有限オートマトンを多数個結合した一個の(有限)オートマトンである。ここでは，多オートマトンを順に生成する規則を考え，その規則に従って生成された多オートマトンの列について，例えばdefinitenessのような性質が，ある番号以降すべてについて成立つか否か，あるいはある番号で初めて成立つようなことが起るか否か，などの問題を扱う。

その動機として，(i)セル構造オートマトン理論の拡張，と(ii)神経系の個体発生や系統発生のモデルづくりとがある。後者については少し説明が必要だと思われる：　神経系の発生の機構は未だ十分に解明されていないが，基本素子であるニューロンが，つぎつぎとシナプス結合をして，特定の神経回路網が完成する。　この時，結合したニューロンは最早細胞

分裂はしないと云われている。 各神経系は固有の機能や性質を持っているが，発生の初期から持っているのではなくて，ある発生段階に達して始めてそれらが現われてくる。 発生の各段階に対応する多オートマトンを考え，生長の時間的経過に対して，多オートマトンの列を考える。 従って，多オートマトンの列について，機能や性質の消長を論ずることによって，発生現象の一側面を知ることができる。

§I 多オートマトン系の定義

I.I 素子オートマトン（cell, a finite automaton）

$A = \langle Q, n, f \rangle$ で定義される。 ここで

Q；内部状態の有限集合， n；入力ターミナル数，各ターミナルには1から n の番号がついていて，各時刻には入力として Q の元が入って来る。

f；$Q \times Q^n \to Q$ で，A の状態遷移関数である。

cell の Q と f を問題にしないで，入力ターミナル数 n のみを扱う場合には，"n-cell" と書く。

I.2 多オートマトン（polyautomaton, a connected set of cells）

まず，n-cell を多数結合した net C_n を定義する：

C_n: $N \times [n] \longrightarrow N \cup X \cup \{0\}$

ただし $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$，$N$ = 自然数の集合，X = 外部

入力変数の集合 $\{x_i \mid i \in N\}$ である。

net C_n 中の cell k から，cell i のターミナル j へ結線されていれば，

$$C_n(i,j) = k$$

とし，外部入力 x_k が cell i のターミナル j へ入っていれば

$$C_n(i,j) = x_k$$

とし，(i,j) ターミナルへは上記いずれの線も入っていないときは

$$C_n(i,j) = 0$$

とする。$C_n(i,j)=0$ のとき，(i,j) は "open" であるという。

C_n は $N\times[n]$ のすべての点について定義されているとは限らないが，$\exists j \in [n]$ について $C_n(i,j)$ が定義されていれば，その i については，$\forall j \in [n]$ で $C_n(i,j)$ が定義されていると仮定する。このとき n-cell i は "C_n の素子である" という。

C_n の素子の全体を (C_n)，その個数を $\#(C_n)$ と書く。

$B(C_n) = \{(i,j) \mid C_n(i,j) = 0\}$ を境界ターミナルの集合，

$X(C_n) = \{(i,j) \mid C_n(i,j) \in X\}$ を入力ターミナルの集合という。

C_n の全体を $\mathcal{C}_n$ と書き，n-net の全体という。

$A = \langle Q, n, f \rangle$ のとき，$M = \langle A, C_n \rangle$，$(C_n \in \mathcal{C}_n)$ を（A から成る）多オートマトンという。M の cell の数は $\#(C_n)$ であり，入力ターミナルは $X(C_n)$ である。

II.4 生長規則の制限

前節の生長規則の定義は広すぎるので，つぎのような制限を設けたものを扱う。

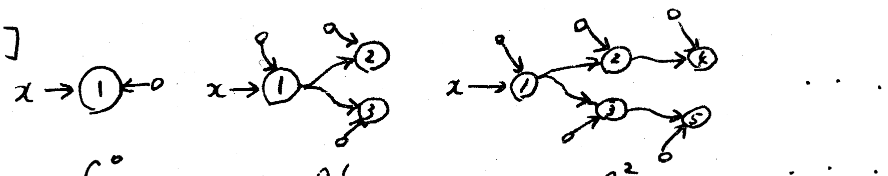
○単調増大型 (monotone growth) m-G ではgはつぎの条件を満たす；

(i) $(g(c)) \supset (c)$, $\quad c \in G_n$

(ii) $(\forall i,j,k \in N)(c(i,j)=k \Rightarrow g(c)(i,j)=k)$

すなわち，一旦 net に含まれた cell は以降のすべての net に含まれる。 また net 内の結線も消えることはない。

[m-G_2 の例]



c^0 $\quad$ c^1 $\quad$ c^2 $\quad$ ...

○内部生長型 (internal growth) i-G

(i) まず単調増大型であること，

(ii) $c(i,j) = x_k \Leftrightarrow g(c)(i,j) = x_k$

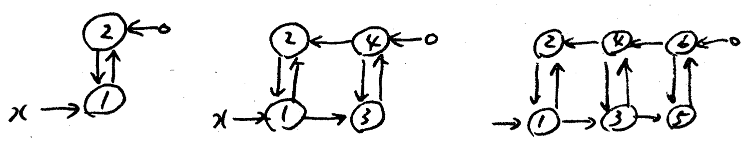
すなわち外部入力ターミナルは不変である。

[i-G_2 の例]

A :

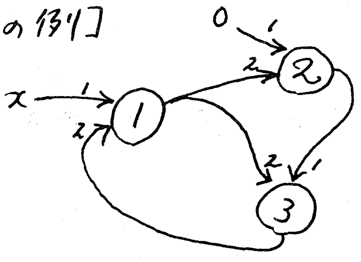
c^0 $\quad$ c^1 $\quad$ c^2 ...(一次元array)

B :



c^0 $\quad$ c^1 $\quad$ c^2 ..(梯子型)

［2-net の例］



ターミナル(1.1)が外部入力 x
ターミナル(2.1)が "open"

<u>II.3</u> 多オートマトン系(列) (growth process, series of nets)

まず n-net の生長規則 $G_n = \langle g, c^0 \rangle$ を考える。

n：素子として n-cell を用いることを示す。明らかなときは省略する。

g：$G_n \to G_n$ の写像であって、$g(c)$ は、定義されているならば、それは c から何らかのアルゴリズムによって一意的に定まるものとする。

c^0：G_n の元で a priori に与えられる。

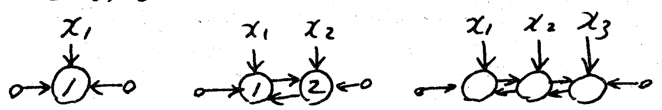
<u>G_n によって生成される net の系列</u>　$S(G_n)$

$$g(c^0) = c^1, \quad g(c^i) = c^{i+1} \ (i=1,2\cdots) \quad \text{として、}$$

$S(G_n) = (c^0, c^1, c^2, \cdots\cdots)$ を G_n によって生成される net の系列という。

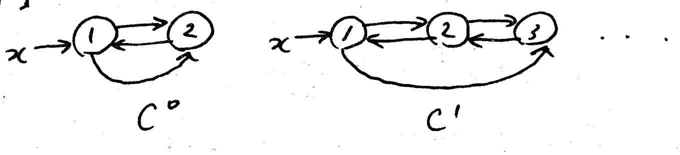
<u>G_n と A によって生成される多オートマトンの系列</u> $S(G_n, A)$ は、$S(G_n)$ の各 net c^i を多オートマトン $\langle A, c^i \rangle = M^i$ でおきかえたものである。

［$S(G_3)$］の例
(m-G でもある)



c^0　　c^1　　c^2　　$\cdots$

[m-G でない例]



§2 多オートマトン系について論ずるテーマ

小渕, 西尾(1970)は一次元セル構造オートマトンの研究の一つとして, 丁度前節の[i-G_2の例A](一次元array)の場合について, $Q=\{0,1\}$とし, openターミナルに定数1を入れたとき, 一般に(fによらないで)C^iが強連結でないならば, C^{i+1}も強連結ではない事を示した。従って, (fに依存して)あるkがあって, C^{k+1}が初めて強連結でなくなるので, このkをfの強連結性の標数と呼んだ。すべてのC^iについて強連結のときは, $k=\infty$と定義した。同様に, 弱連結性, 到達可能性, 可制御性などの標数も定義された。

また西尾, 小渕(1969)は, 有限長の一次元arrayにおいて, 一端から他端への情報伝達を定義し, cell, とくにfが, その情報伝達能力の点から, (I)初期状態によらず, ある有限長のarrayならば情報が伝わるが, より長い場合は伝わらない, (III)初期状態によらず, いくらでも長いarrayにおいて情報が伝わる, (II)初期状態に依存して, 情報伝達能力が変わる, という3種に類別できることを示した。とくに(I)の類のcellについては, 情報伝達の長さの限界が存在するわけ

である。

以上のような結果を考慮して，つぎの定義をする。

○究極的に安定な性質： ある性質，あるいは命題（netについての）Pがあり，ある$S(G_n, A)$において，$(\exists k)(P(M^i) = \text{true} \; \forall i \geq k)$のとき，$P$は$(G_n, A)$において究極的に安定であるという。そのような$k$の最小のものを$P$の安定性の標数という。

あるcellのクラス$\tilde{A}$のすべてのcellについて，Pが究極的に安定ならば，Pは$(G_n, \tilde{A})$について究極的に安定であるという。

そこで，問題として，如何なるPがどのような$(G_n, \tilde{A})$について究極的に安定なのか？ を考える。また特定のPを定めておいて，それが安定になる$(G_n, \tilde{A})$を問う。またAを例えばMcCulloch-Pittsニューロンとして，固定しておいて，PとG_nの関係を調べるのも興味あるテーマである。

§3 Definiteness

ここでPの具体例として，definitenessを取上げる。その動機は，実際の神経系は，短時間記憶のニューロンを素子としてより長い記憶を実現しているが，依然として有限時間記憶のnetであると考えたからである。

3.1 Definiteness の定義と基本的事項

○有限オートマトンMの最終状態が入力系列の最近のk時間の部分によって一意的に決まり、k−1時間の部分ではそうでないとき、Mはdefiniteであり、そのorderはkであるという。そのようなkが存在しないとき、Mはindefiniteである。

○任意の有限オートマトンのdefinitenessとそのorderを決めるアルゴリズムが存在する。

○オートマトンがdefiniteであるならば、強連結部分は一個である。

○$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を入力ターミナル変数とするオートマトンを $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と書く。Aが $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ についてdefiniteのとき、Aを(totally) definiteという。変数のいくつかを定数に固定して得られるオートマトンがdefiniteのとき、Aを(partially) definiteという。ある変数 x_i 以外の変数を定数にしたオートマトンが、この定数のとり方に無関係にdefiniteであるとき、Aは x_i について(totally) definiteであるという。そこで、つぎの命題が成立つ。

$\exists i$, x_i についてAがdefiniteならば、Aはtotally definiteである。そのorderは $A(x_i)$ のそれに等しい。（証明略）

3.2 $A=\langle\{0,1\}, 2, f\rangle$, $G_2=$一次元array の場合

cellとして、2入力、2状態のオートマトンを用いる一次

元状のnetの列において、definitenessが安定か否かを調べる。

fを表現するのに、

$$\begin{array}{c|c|cc} & & \multicolumn{2}{c}{x_2} \\ & 0 & 0 & 1 \\ \hline x_1 & 0 & a & c \\ & 1 & b & d \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & e & g \\ 1 & f & h \end{array}$$

$(a, b, \cdots = 0 \text{ or } 1)$ のような表を用いることがある。その意味は、例えば、状態が0で、ターミナル $x_1=1$、ターミナル $x_2=0$ ならば、状態 b へ遷移する。このことを $f(0,1,0)=b$ とも書く。

さて、ここで得られた主な結果を示そう。

〔定理〕 一次元状のnetの列について、definitenessは究極的に安定ではない。

〔証明〕はつぎの命題による。

〔命題〕 $f_{\oplus}(q, x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ (mod. 2 の加算) とする cell $A = \langle \{0,1\}, 2, f_{\oplus} \rangle$ を用いる場合、(そのorderはi)

(i) $i = 2^k - 1$ $(k=1, 2 \cdots)$ となる M^i はdefiniteであり、

(ii) $i = 2^k$ $(k=1, 2 \cdots)$ となる M^i はindefiniteである。

G_2として open terminal から入れる定数を0, 1いずれに選んでもよい。また(内部成長型ではないが)両端から外部入力を入れたnetを考えても結果は同じである。

〔証明〕

まず(i)を証明するが、両端から外部入力系列 $a_0 a_1 \cdots a_t \cdots$ および $b_0 b_1 \cdots b_t \cdots$ が入る場合を考える。

M^i ($i=2^k-1$) の初期様相を$\alpha^0=\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_i$ ($\alpha=$ 0 or 1 の変数) とする。時刻 $t=1$ の様相は $\alpha^1 = a_0\oplus\alpha_2, \alpha_1\oplus\alpha_3, \cdots, \alpha_{i-2}\oplus\alpha_i, \alpha_{i-1}\oplus b_0$ となる。一般に時刻 t における、各セルの状態は、$\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ の線型結合 ($\oplus$の意味で) と外部入力 $a_0\sim a_{t-1}$, $b_0\sim b_{t-1}$ の線型結合部分の和$\oplus$で表現される。時刻 $t=k$ ですべての cell の状態が $\alpha_1\sim\alpha_i$ の項を含まなくなれば、M^i は definite (order k) である。初期様相の情報がいずれかの cell の中に永久に残るならば、M^i は indefinite である。

さて $f_\oplus$ の線型性から、外部入力系列として 000… を考えておいてよいことがわかる。初期様相の情報 $\alpha_1\sim\alpha_i$ が $f_\oplus$のもとで時間的に変化する様子を見るために、つぎのような線型変換行列を用いる。〔小渕氏の示唆による〕。

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{i\times i}$$

ただし T_iの元は$(\{0,1\},\oplus)$の元だと考える。

時刻 t の様相をα^t ($t=0,1,2,\cdots$) とすると、

$$\alpha^{t+1} = \alpha^t T_i$$

従って

$$\alpha^t = \alpha^0 T_i^t$$

いま $f_i(\lambda)=|T_i-\lambda E|$,(ただし Eは単位行列、$|\ |$は行列式) を定義する。

すると $f_i(\lambda) = -\lambda^i$ が成立つ。 $(i=2^k-1,\ k=2,3\cdots)$

なぜなら，(i) $i=3=2^2-1$ のときは手計算で $f_3(\lambda)=-\lambda^3$ となる。

(ii) $i=2^s-1$ のとき $f_i(\lambda)=-\lambda^i$ が成立ったとする。

さて $$f_{2^{s+1}-1}(\lambda) = -\lambda\left(f_{2^s-1}(\lambda)\right)^2 - 2\, f_{2^s-2}(\lambda)\cdot f_{2^s-1}(\lambda)$$

(これは第 2^s 行の3要素について小行列展開することによって得られる。)

いま㊉で演算しているから，右辺第2項は消える。

従って，$f_{2^{s+1}-1}(\lambda) = -\lambda\cdot(-\lambda^{2^s-1})^2 = -\lambda^{2^{s+1}-1}$。

帰納法が完成した。

他方，Cayley-Hamiltonの定理により

$$f_i(T_i) = [T_i - T_i E] = O \quad (\text{ゼロ行列})$$

$f_i(\lambda) = -\lambda^i$ から，

$f_i(T_i) = -T_i^i$

すなわち

$$T_i^i = O \quad (i=2^k-1,\ k=2,3\cdots)。$$

従って $\alpha^i = \alpha^0 T_i^i = 0$ (ゼロベクトル)。

すなわち初期様相にかかわらず，$t=i$ において M^i の様相は外部入力 $a_0 \sim a_{i-1}$, $b_0 \sim b_{i-1}$ のみによって決まる。

以上で order は i 以下であることがわかったが，丁度 i であることを証明するために，

$\exists \alpha^0 \mid \alpha^0 T_i^{i-1} \neq 0$ であることを示す。

実際 $\alpha^0 = (\alpha_1 000 \cdots 0)$ とすると

$\alpha^0 T_i^{i-1} = (\alpha_1 0 \alpha_1 0 \alpha_1 \cdots \alpha_1) \neq 0$ である。

つぎに命題の(ii)を証明する。

$i = 2^k$ とし，$\alpha^0 = (\alpha_1 00 \cdots 0)_i$ とする。すると

$\alpha^0 T_i^{i-2} = (\alpha_1 0 \alpha_1 0 \cdots \alpha_1 0)$ となり，従って

$\alpha^0 T_i^{i-1} = (000 \cdots 0 \alpha_1) \equiv \alpha^*$

T_i は左右対称だから，

$\alpha^* T_i^{i-1} = (\alpha_1 0 \cdots 0) = \alpha^0$

すなわち $\alpha^0 T_i^{2i-2} = \alpha^0$。

α^0 が周期 $2i-2$ で繰返すから，cell 1 の状態 α_1 が永久に M^i の中に残ることになり，M^i が indefinite であることになる。〔命題の証明終り〕

$f_\oplus$ については，$i = 2^k$ だけでなく，$2^k - 1$ 以外のすべての i について，M^i が indefinite になると予想される。上の証明法から明らかに $f_{\oplus 1} = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ についても同じ命題が成立つ。

⑨その他の関数について：　2状態2入力ターミナルの cell は全体で256種ある。それらについて，definiteness の安定

性を調べた。 Kobuchi (1973) が強連結性や弱連結性の標数を全部求めているので、その結果を参考にして、興味のある f について調べた。

関数の名前を次の表の表現における abcdefgh を 2進数として読んだ数で表わすことにする。 open terminal には "0" を入れる。

1) $f_{85} = \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \end{array}$ は shift register を形成するから、すべての i について、 M^i は definite (order i) である。

2) f_{86} : M^1 は definite, M^i ($i \geq 2$) は indefinite.

[証明] 初期様相 $000 \cdots 0 \equiv 0^i$ に入力 $000 \cdots$ を入れると常に 0^i に留まっているが、 $0^{i-2}11$ に $00 \cdots$ を入れると $0^{i-2}11$ に留まる。

3) f_{101} : M^1, M^3, M^7 は definite (order 1, 3, 7)

M^2, M^4, M^5, M^6 は indefinite

これは計算機を使って求めた結果である。*)

[予想] f_{101} について M^i ($i = 2^k - 1$) は open terminal が 0 のとき、order i の definite である。

4) f_{105} : M^2 = definite M^i | $i = 1, 3, 4, 5, 6, 7$ = indefinite *)

5) f_{106} : M^i ($1 \leq i \leq 7$) indefinite *)

---

*) FACOM U200 で小さな i については M^i の状態遷移表を求め手で definiteness を求めた。 $i \geq 5$ では全部計算機にやらせたが、東京電機大学の古東馨氏が東大の山田尚勇氏と共同開発された HLISP

以上はすべて強連結性の標数が∞の関数である。従って、大きなℓについて M^{ℓ} がdefiniteになる可能性をもっているが、indefinitenessのつがより続いた後、definiteになるとは予想しにくい。計算結果からつぎの予想がたつ。

〔予想〕2状態、2入力cellの一次元arrayにおいては、M^{ℓ} がdefiniteの場合、そのorderはℓである。（ℓはcell数）

〔問題〕netの形を変えてorderが素子数より大きいdefinite netが存在するか？

§4　まとめ

多オートマトン系の理論の一つの方向を、生物学からの動機によって定式化し、最も単純な場合を解いた。実際の神経系の発生、生長のモデルを直接目標とするには、発生の機構を積極的に取入れ、cellとして、ニューロンやニューロン群を用いねばならない。また性質（ℓ）として、より生物的意味のあるものを考える必要がある。

〔文献〕小渕．西尾（1970）：通信学会研究会資料 A69-62（1970）

西尾．小渕．（1969）：連合大会予稿 3369-3370（1969）

Kobuchi（1973）：京大・工・学位論文

---

*をベースにしたオートマトン処理プログラム集STOPをFACOM 230-48にかけて結果を出していただいた。f田の命題の予想はこのような計算結果を利用して立てたものである。